А. П. Буланов (Обнинск)

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫХ СТЕПЕНЕЙ И О ТОЧНОСТИ ИХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Пусть последовательность такова, что $a_k \neq 0, \quad k = 1,2,\ldots$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n| = \overline{a} < \infty$, и пусть

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} z^{a_1 \cdot z^{\cdot^{\cdot^{a_{n-1}\cdot z^{a_n}}}}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle. \tag{1}$$

Поскольку функция $w = \operatorname{Ln} z$ многозначна, то образы отображения $z = e^w$ следует рассматривать на римановой поверхности логарифма. На ней же будем рассматривать область U, в которой функция (1) регулярна.

Теорема 1. *Если e^K — образ круга $K = \{w : |w| < 1/e \cdot \overline{a}\}$ на римановой поверхности логарифма при отображении $z = e^w$, а U — область регулярности $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle$, то $U \supset e^K$.*

Теорема 1а. *Пусть коэффициенты $a_k > 0, \quad k = 1,2,\ldots$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Тогда граничная точка $z = x = \exp(1/e \cdot a)$ области e^K не является точкой регулярности функции $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle$.*

Теорема 2. *Пусть $a_{2k} = 1, \quad a_{2k+1} = \beta, \quad |\beta| > 1, \quad k = 0,1,2,\ldots$, и пусть*

$$q = \sqrt{|\beta|} \cdot \exp\left(\frac{2\tau^2}{1-\tau^2}\right), \tag{2}$$

где $\tau = \tau(\gamma) = \tau(\sqrt{|\beta|})$ есть обратная функция по отношению к функции

$$\gamma(\tau) = \sqrt{|\beta|} = \frac{1+\tau}{1-\tau} \cdot \exp\left(\frac{2\tau}{1-\tau^2}\right), \quad 0 \leq \tau < 1. \tag{3}$$

Тогда $U \supset e^K$, где U — область регулярности $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle$, e^K — образ круга $K = \{w : |w| < 1/e \cdot q\}$.

Теорема 2а. *Пусть в условиях теоремы 2 число* $\beta > 1$, *число* q *определяется по формулам* (2) *и* (3). *Тогда граничная точка* $z = x = \exp(1/e \cdot q)$ *области* e^K *не является точкой регулярности функции* $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle$.

Теорема 1 доказана в работе [1] для случая, когда у многозначного логарифма $\mathrm{Ln}\, z$ берется лишь главная ветвь $\ln z$, соответствующая значению $\ln 1 = 0$.

Динамическая система

$$\dot{x}_k = x_k \cdot \alpha_{k+1} \cdot x_{k+1} \cdot \left[1 + t \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} + t^2 \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdot \alpha_{k+3} \cdot x_{k+3} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots t^{m-1} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdots \alpha_k \cdot x_k \right] \cdot \left[1 - t^m \cdot \alpha_1 \cdot x_1 \cdot \alpha_2 \cdot x_2 \cdots \alpha_m \cdot x_m\right]^{-1}; \tag{4}$$

с начальными условиями $x_k(0) = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, имеет решение, представимое системой бесконечнократных экспонент $(k = 1, 2, \ldots, m)$

$$x_k(t) = \langle e^t; \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \alpha_1, \ldots \rangle. \tag{5}$$

По теореме 1 гарантировано, что все эти функции имеют смысл, если $t \in \left(-\frac{1}{e \cdot \overline{\alpha}}, \frac{1}{e \cdot \overline{\alpha}}\right)$, где $\overline{\alpha} = \max\limits_{1 \le k \le m} |\alpha_k|$.

В общем случае $\min\limits_{1 \le k \le m} \alpha_k < \max\limits_{1 \le k \le m} \alpha_k$, поэтому интервал сходимости для всех функций (5) может быть расширен (см. [2], [3]).

При $m = 2$ решение может быть сведено к двум экспонентам бесконечной кратности

$$x(t) = \langle e^t; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle,$$

$$y(t) = \langle e^t; 1, \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle, \quad t \in \left(-\frac{1}{e \cdot q}, \frac{1}{e \cdot q}\right).$$

Теорема 2 точно отвечает на вопрос: какую величину следует взять вместо $\overline{\alpha} = \max\limits_{1 \le k \le m} |\alpha_k|$ в случае, если $m = 2$.

Отметим, что в явном виде число q оценивается формулой:

$$q(|\beta|) \le \sqrt{|\beta|} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(\ln|\beta|) \cdot \frac{\sqrt{|\beta|}-1}{\sqrt{|\beta|}+1}\right], \quad 1 \le |\beta| \le 2803.$$

Если $|\beta| > 2803$, в силу вступают другие оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буланов А. П. *Регулярность степеней бесконечной кратности*// Известия АН РФ, серия матем. – Т. 62. – No 5. – 1998. – С. 49–78.

2. Буланов А. П. *О степени бесконечной кратности с коэффициентами, имеющими поочередно два значения*// Современные проблемы теории функций и их прил. – Тезисы докл. 9-й Саратовск. зимней школы (26 января – 1 февраля 1998 г.). – С. 31.

3. Амбарцумян Г. А., Буробин А. В. *О продолжении функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности*// Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докл. Воронежск. зимней матем. школы (27 января – 4февраля 1999 г.). – С. 16.

Н. В. Вагизова, А. В. Кузнецов (Казань)

ЗАДАЧИ СОУДАРЕНИЯ ЖИДКИХ СТРУЙ С УЧЕТОМ СИЛ ТЯЖЕСТИ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Для теоретического анализа сварки взрывом двух пластин, метаемых навстречу друг другу под малым углом, использовалась модель соударения струй идеальной невесомой жидкости [1]. Однако на основе этой модели нельзя было получить и, следовательно, объяснить волнообразование на границе контакта. Качественное объяснение было дано позднее на основе учета сжимаемости металла пластин [2, 3].

В рамках модели несжимаемой жидкости причиной волн могут быть силы тяжести и поверхностного натяжения, если рассматривать соударение струй как двухслойное течение разно-